第5讲 一元二次方程的解法

**知识梳理**

**一、开平方法**

利用平方根的定义及其性质直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做**直接开平方法**.实际上是把一个一元二次方程“降次”，转化为两个一元一次方程.

**形如*ax*2+*c*=0(*a*≠0)的一元二次方程可用开平方法.**

可先将方程化为

(1)当即时，原方程的根为

(2)当即时，原方程无实数根；

(3)当即*c*=0时，原方程的根为*x*1=*x*2=0.

**例1：**用开平方法解下列方程：

(1)； (2)1=27*y*2； (3)121*x*2+324=0.

**例2：**解下列方程：

(1)； (2)8(*x*+2)2=(3*x*+1)2； (3)(*x*-3)2=*a*2.

**例3：**解下列方程：

(1)； (2).

**二、因式分解法**

通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于零的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题，像这样解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

因式分解法的原理：**当*A*·*B*=0时，必有*A*=0或*B*=0；当*A*=0或*B*=0时，必有*A*·*B*=0.**

用因式分解法解一元二次方程的一般步骤：

(1)**移项：**将方程的右边化为零；

(2)**化积：**将方程的左边分解为两个一次因式的乘积；

(3)**转化：**令每个因式分别为零，得到两个一元一次方程，达到降次的目的；

(4)**求解：**解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解.

**例1：**解下列方程：(1)*x*2-8*x*+15=0； (2)(1+)*x*2-(3+)*x*+=0.

**例2：**解下列关于*x*的方程：

(1)*x*2-(2*a*+1)*x*+*a*2+*a*=0； (2)*x*2-*a*(3*x*-2*a*+*b*)=*b*2； (3)*abx*2-(*a*2+*b*2)*x*+*ab*=0(*ab*≠0).

**例3：**求一个一元二次方程，使它的两根分别为和，且这个一元二次方程的二次项系数是1.

**例4：**已知方程的较大根是*a*，方程的较小根是*b*，求的值.

**三、配方法**

通过配成完全平方式的方法得到一元二次方程的解，这种解一元二次方程的方法称为**配方法**.

配方法的理论根据是完全平方公式，利用完全平方公式*a*2±2*ab*+*b*2=(*a*±*b*)2，把一元二次方程转化为(*x*+*a*)2=*b*(*b*≥0)的形式，再用直接开平方法就可求出一元二次方程的解.

用配方法解一元二次方程的一般步骤：

(1)如果一元二次方程的二次项系数*a*不是1，就先将方程两边同除以*a*，使方程的二次项系数化为1；

(2)把常数项移到方程的右边；

(3)根据完全平方公式(*a*±*b*)2=*a*2±2*ab*+*b*2中的*b*2是2*ab*中2*b*的一半的平方，在方程的两边各加上一次项系数一半的平方，可使方程的左边变成一个完全平方式，右边是一个常数；

(4)如果右边是非负实数，用直接开平方法求出方程的解.

**例1：**用配方法解下列方程：

(1)*x*2+6*x*-5=0； (2)*x*2+3*x*-40=0；

(3)3*x*2-2*x*-1=0； (4)*x*2+2*mx*-*m*2=0.

**例2：**求证：无论*x*为何值时，代数式*x*2-4*x*+5的值恒大于0.

**四、公式法**

对于*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)有(其中*a*≠0，*b*2-4*ac*≥0).

用这一求根公式解一元二次方程的方法称为**公式法**.

用公式法解一元二次方程的一般步骤为：

(1)把方程化为一般形式，确定*a*、*b*、*c*的值；

(2)求出*b*2-4*ac*的值；

(3)若*b*2-4*ac*≥0，则把*a*、*b*、*c*及*b*2-4*ac*的值代入求根公式，求出*x*1、*x*2；若*b*2-4*ac*<0，则方程没有实数解.

当套用公式时，先要弄清*a*、*b*、*c*指的是什么.

**例1：**用公式法解下列方程：

(1)2*x*2-3*x*+1=0； (2)*x*2-4*x*+10=0.

**例2：**用公式法解下列方程：

(1)(2*y*-1)(2*y*+1)-8*y*=(*y*-1)-1； (2)2(*y*-1)(*y*+3)+5=*y*(*y*+2)-3.

**五、综合应用**

**例1：**用恰当方法解下列方程：

(1)*x*2-*x*-*x*+=0； (2)(2*y*-1)2=；

(3)*x*2-12*x*-9964=0； (4)*x*2-7*x*+5=0.

**例2：**解下列关于*x*的方程：

(1)； (2)*mx*2-*nx*-*p*=0(*mp*>0)；

(3)；

(4).

**同步训练**

1.用开平方法解下列方程：

(1)； (2).

2.用因式分解法解下列关于*x*的方程：

(1) 5*x*(3*x*-)-3*x*+=0； (2)；

(3)； (4).

3.已知，求的值.

4.用配方法解下列方程：

(1)2*x*2+*x*-30=0； (2)*x*2-2*mx*-4=0.

5.用公式法解下列方程：

(1)(*x*+1)(*x*-1)=2*x*； (2)*x*=(*x*+1)(*x*-1)；

(3)5*x*+2=(3*x*-1)(2*x*+2)； (4)(*x*+3)2+(*x*-1)2=2；

**三角形复习**

1．已知：*AB*∥*ED*，∠*EAB*=∠*BDE*，*AF*=*CD*，*EF*=*BC*，求证：∠*F*=∠*C*

*D*

*C*

*B*

*A*

*F*

*E*

证明：*AB*∥*ED*，得：∠*EAB*+∠*AED*=∠*BDE*+∠*ABD*=180度，

∵∠*EAB*=∠*BDE*，∴∠*AED*=∠*ABD*，

∴四边形*ABDE*是平行四边形.

∴得：*AE*=*BD*，

∵*AF*=*CD*，*EF*=*BC*，∴三角形*AEF*全等于三角形*DBC*，

∴∠*F*=∠*C*.

2．已知：*AB*=*CD*，∠*A*=∠*D*，求证：∠*B*=∠*C*

*A*

*B*

*C*

*D*

证明：设线段*AB*，*CD*所在的直线交于*E*，（当*AD*<*BC*时，*E*点是射线*BA*，*CD*的交点，当*AD*>*BC*时，*E*点是射线*AB*，*DC*的交点）.则：

△*AED*是等腰三角形.

∴*AE*=*DE*

而*AB*=*CD*

∴*BE*=*CE* (等量加等量，或等量减等量）

∴△*BEC*是等腰三角形

∴∠*B*=∠*C*.